# Mathematik-Teil der Prüfung Mathematik III im Frühjahr 2005

Vorlesung *Mathematik III mit Systemanalyse* von Dr. P. Thurnheer.

## Aufgaben:

1. Stellen Sie die Funktion $f(x) = 1 - x$ auf dem Intervall $-\pi < x < \pi$ durch ihre Fourierreihe dar. Konvergiert die Fourierreihe für $f$ an der Stelle $x = \pi$? Wenn ja, wogegen?
   **Hinweis:** Berechnen Sie zuerst die Fourierkoeffizienten der Funktion $f^*(x) = f(x) - 1$.

2. Lösen Sie die folgenden zwei partiellen Differentialgleichungsprobleme mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen.

   **PDE 1.** $$u_{xx}(x,t) - \frac{1}{t}\, u_t(x,t) = 0, \quad \text{wobei}$$
   $$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{für alle } t \\ u(0,0) = 2. \end{cases}$$

   **PDE 2.** $$u_{xx}(x,t) - \frac{1}{t}\, u_t(x,t) = 0, \quad \text{wobei}$$
   $$\begin{cases} u(x+2\pi,t) = u(x,t) \quad \text{für alle } t \\ u(x,0) = 1 - x \quad \text{für } -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

**Bitte wenden!**

Lösungen:

1. Setzen Sie $f^*(x) := f(x) - 1 = -x$. $f^*(x)$ ist eine ungerade Funktion (bezüglich 0), darum:

$$\begin{aligned}
a_k^* &= 0 \text{ für alle } k \\
b_k^* &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^*(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-x)\sin(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big\{\Big[\frac{1}{k}(-x)(-\cos(kx))\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\cos(kx)dx\Big\} \\
&= \frac{2}{\pi}\Big\{\frac{\pi}{k}(-1)^k - \underbrace{\Big[\frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big]_0^\pi}_{=0 \quad \forall k\neq 0}\Big\} \\
&= \frac{2}{k}(-1)^k
\end{aligned}$$

   Also ist die Fourierreihe von $f^*$

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^k\sin(kx),$$

   woraus folgt, dass die Fourierreihe von $f$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f^*(x) + 1 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^k\sin(kx)
\end{aligned}$$

   lautet. D.h. $a_0 = 2$ , $a_k = a_k^* \ \ \forall k \geq 1$ , $b_k = b_k^* \ \ \forall k \geq 1$.

   Die Fourierreihe von $f$ an der Stelle $\pi$ (Sprungstelle) konvergiert dann gegen 1 da $\sin(k\pi) = 0 \ \ \forall k$. Dies ist der Mittelwert $(f(\pi+) + f(\pi-))/2$.

2. Mit dem Separationsansatz ($u(x,t) = X(x)T(t)$) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&X''(x)T(t) - tX(x)T'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
&\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{t}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.
\end{aligned}$$

   Lösung für $X(x)$: Die Char. Gleichung hat Wurzeln $\pm\sqrt{\lambda}$, damit ist

$$\begin{aligned}
\lambda < 0 \ &: \ X(x) = D\sin(\sqrt{|\lambda|}x) + E\cos(\sqrt{|\lambda|}x) \\
\lambda > 0 \ &: \ X(x) = A\exp\{\sqrt{\lambda}x\} + B\exp\{-\sqrt{\lambda}x\}.
\end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Lösung für $T(t)$: Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
&\lambda t = \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{(\mathrm{d}T/\mathrm{d}t)}{T} \quad \Longleftrightarrow \\
&\lambda t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}T}{T} \quad \Longrightarrow \quad \ln(T) = \int \lambda t\,\mathrm{d}t = \lambda t^2/2 + C_0 \\
&\Longrightarrow \quad T(t) = \exp\{\lambda t^2/2 + C_0\}.
\end{aligned}$$

Für **PDE 1** besagt das Verhalten für $x \to \infty$, dass $\lambda > 0$ mit $A = 0$, also $X(x) = B\exp\{-\sqrt{\lambda}x\}$. Die weitere Bedingung impliziert $B\exp(C_0) = 2$, was u.a. für $(B, C_0) = (2, 0)$ erfüllt wird. Somit löst

$$u(x,t) = 2\exp\{\lambda t^2/2\}\exp\{-\sqrt{\lambda}x\}$$

für alle $\lambda > 0$ das Problem.

Für **PDE 2** besagt die periodische Bedingung, dass $\lambda < 0$. Setzen Sie $-\lambda = k^2$, damit die Diffgleichung für $X$ Lösung $X_k(x) = D_k\sin(kx) + E_k\cos(kx)$ hat. Die Periodizität verlangt $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Also wird das Problem für jedes solches $k$ von

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(x) = \exp\{-k^2t^2/2\}(D_k\sin(kx) + E_k\cos(kx))$$

gelöst. Wegen Linearität der PDE ist auch $\sum_k u_k(x,t)$ eine Lösung der PDE. Somit kann die zweite Bedingung mit Hilfe der Fourierkoeffizienten aus Aufgabe 1 (für $f(x) = 1 - x$) erfüllt werden. Die gesuchte Lösung ist

$$u(x,t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-k^2t^2/2\} \cdot \frac{2}{k}(-1)^k\sin(kx).$$